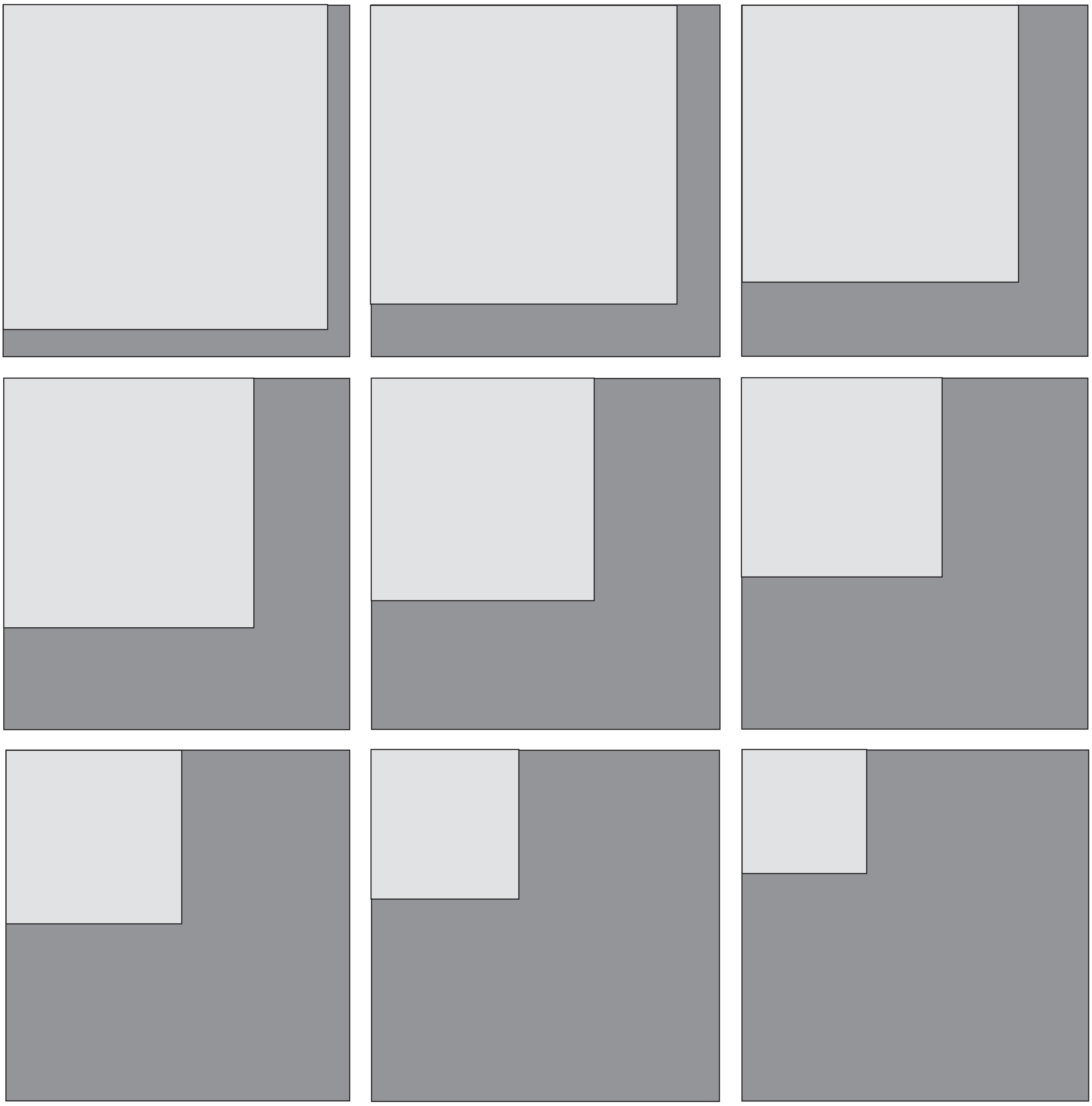
Colégio Bandeirantes



Matemática

Fascículo 04

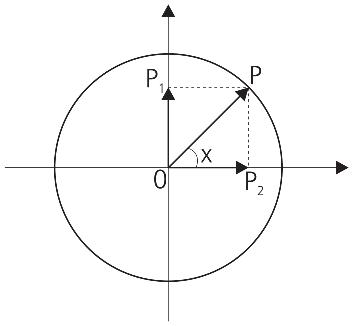
Álvaro Zimmermann Aranha

Índice

Trigonometria

Resumo Teórico

Função Seno e Cosseno



$\text{senx} = OP_1$

$\text{cosx} = OP_2$

Gráfico de y = senx

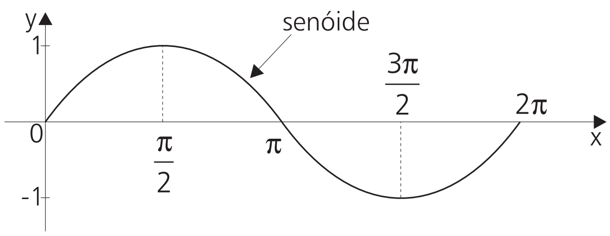
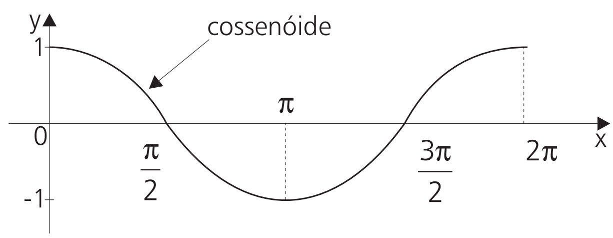


Gráfico de y = cosx



Relações Fundamentais

Relações Fundamentais

$\text{sen}^2x + \cos^2x = 1, \forall x \in R$

$\text{tgx} = \dfrac{\text{senx}}{\text{cosx}}\left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$

$\text{cotgx} = \dfrac{\text{cosx}}{\text{senx}}(x \neq k\pi)$

$\text{secx} = \dfrac{1}{\text{cosx}}\left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$

$\text{cossecx} = \dfrac{1}{\text{senx}}(x \neq k\pi)$

Conseqüências $\left(x \neq \dfrac{k\pi}{2}\right)$

$\text{cotgx} = \dfrac{1}{\text{tgx}}$

$1 + \text{tg}^2x = \sec^2x$

$1 + \text{cotg}^2x = \text{cossec}^2x$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \text{tg}^2 x}$

$\text{sen}^2 x = \dfrac{\text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x}$

Tabela

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
senx	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosx	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tgx	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Adição de Arcos

Fórmula de Adição

$\cos(a + b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\cos(a - b) = \cos a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b} \qquad \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{cotg}(a+b) = \frac{\operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{cotg} b - 1}{\operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} a} \qquad \operatorname{cotg}(a-b) = \frac{\operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{cotg} b + 1}{\operatorname{cotg} b - \operatorname{cotg} a}$$

Fórmulas de Multiplicação

a. Arcos duplos

$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$

$$\cos 2a = \begin{cases} \cos^2 - \operatorname{sen}^2 a \\ \text{ou} \\ 2\cos^2 a - 1 \\ \text{ou} \\ 1 - 2\operatorname{sen}^2 a \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

b. Arcos Triplos

$\operatorname{sen} 3a = 3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a$

$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3 \operatorname{tga} - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}$$

Fórmulas de Divisão

$$\text{sen}\,\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad \text{tg}\,\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

Tangente do Arco Metade

$$\text{sen}x = \frac{2\text{tg}\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\,\frac{x}{2}} \qquad \text{tg}x = \frac{2\text{tg}\frac{x}{2}}{1-\text{tg}^2\,\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1-\text{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\,\frac{x}{2}}$$

Fórmulas de Transformação em Produto

$$\cos p + \cos q = 2\cdot\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\cdot\text{sen}\frac{p+q}{2}\cdot\text{sen}\frac{p-q}{2}$$

$$\text{sen}\,p + \text{sen}\,q = 2\cdot\text{sen}\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\text{sen}\,p - \text{sen}\,q = 2\cdot\text{sen}\frac{p-q}{2}\cdot\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\text{tg}\,p + \text{tg}\,q = \frac{\text{sen}(p+q)}{\cos p\cdot\cos q}$$

$$\text{tg}\,p - \text{tg}\,q = \frac{\text{sen}(p-q)}{\cos p\cdot\cos q}$$

Equações Trigonométricas Fundamentais

$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\beta \Rightarrow \alpha = \beta + 2k\pi$ ou $\alpha = (\pi - \beta) + 2k\pi$

$\cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \alpha = \pm\beta + 2k\pi$

$\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,\beta \Rightarrow \alpha = \beta + k\pi$

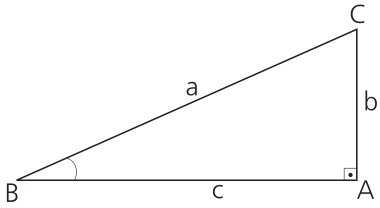
Funções Circulares Inversas

$y = \text{arc sen}x \Leftrightarrow \text{sen}y = x$ e $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

$y = \text{arc cos}x \Leftrightarrow \cos y = x$ e $0 \le y \le \pi$

$y = \text{arc tg}x \Leftrightarrow \text{tg}y = x$ e $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

Triângulo Retângulo: Relações Trigonométricas



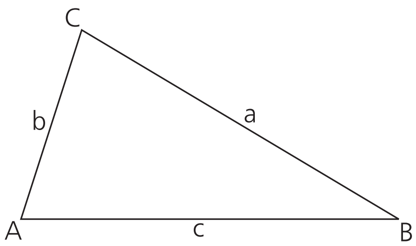
$$\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c}$$

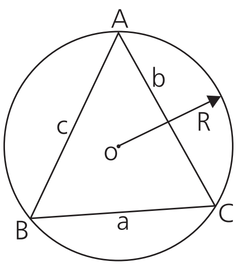
Triângulo Qualquer

Lei dos Cossenos



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.\cos \hat{C}$$

Lei dos Senos



$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$$

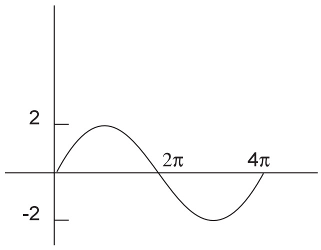
Exercícios

01. Os números reais sen $\frac{\pi}{12}$, sen a e sen $\frac{5\pi}{12}$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Então o valor de sen a é:

a. $\frac{1}{4}$ b. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ c. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ d. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ e. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

02. A figura abaixo mostra parte do gráfico da função:

a. sen x
b. $2\text{sen}\frac{x}{2}$
c. 2 sen x
d. 2 sen 2x
e. sen 2x



03. Dentre os números abaixo, o mais próximo de sen 50º é:

a. 0,2 b. 0,4 c. 0,6 d. 0,8 e. 1,0

04. O menor valor de $\frac{1}{3 - \cos x}$, com x real, é

a. $\frac{1}{6}$ b. $\frac{1}{4}$ c. $\frac{1}{2}$ d. 1 e. 3

05. O valor de (tg 10º + cotg 10º) sen 20º é

a. $\frac{1}{2}$ b. 1 c. 2 d. $\frac{5}{2}$ e. 4

06. Sabe–se que um dos ângulos internos de um triângulo mede 120º. Se os outros dois ângulos, x e y são tais que $\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, a diferença entre as medidas de x e y é:

a. 5º b. 15º c. 20º d. 25º e. 30º

07. O número de raízes da equação cos2x – senx = 0 no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$ é

a. 4 b. 3 c. 2 d. 1 e. 0

Dicas

01. Observe que na P.A. (a_1, a_2, a_3), o termo médio $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$. A seguir, transforme a soma $a_1 + a_3$ em produto, utilizando a fórmula:

$$\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \cdot \text{sen}\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2}$$

02. O período da função **y = b. sen cx** (b, c > 0) é dado por $p = \frac{2\pi}{c}$

03. Comparar sen 50° com sen $45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e sen $60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, sabendo que no 1.o Quadrante a função seno é crescente.

04. Sendo $-1 \le \cos x \le 1$, basta atribuir a **cos x** os valores 1 e –1.

05. Lembrar que $tgx = \dfrac{senx}{cosx}$, $cotgx = \dfrac{cosx}{senx}$ e $sen2x = 2 \cdot senx \cdot cosx$.

06. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, temos que **x** + **y** + 120º = 180º ou **x** = 60º – **y**. Substituindo **x** na equação dada, obtemos **y** utilizando a fórmula
cos(a – b) = cosa . cosb + sena senb.

07.
1. Na equação dada, substitua cos 2x por $1 - 2\,sen^2x$ (ver página 2).
2. Calcule os valores de senx.
3. Resolva a equação senx = sena sabendo que:

$$senx = sena \Rightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ ou \\ x = (\pi - a) + 2k\pi \end{cases} \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

Resoluções

01. Alternativa d.

Na P.A. $\left(sen\dfrac{\pi}{12},\ sen\ a,\ sen\dfrac{5\pi}{12}\right)$ temos:

$$sen\ a = \frac{sen\dfrac{\pi}{12} + sen\dfrac{5\pi}{12}}{2}$$

$$2\ sen\ a = sen\frac{5\pi}{12} + sen\frac{\pi}{12}$$

Como $sen\ p + sen\ q = 2 \cdot sen\dfrac{p+q}{2} \cdot cos\dfrac{p-q}{2}$, vem:

$$2\ sen\ a = 2 \cdot sen\left(\frac{\dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{\pi}{12}}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\dfrac{5\pi}{12} - \dfrac{\pi}{12}}{2}\right)$$

$$2\ sen\ a = 2 \cdot sen\frac{\pi}{4} \cdot cos\frac{\pi}{6}$$

$$sen\ a = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow sen\ a = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

02. Alternativa b.

A função y = b . sen cx (b, c > 0) tem período $p = \dfrac{2\pi}{c}$ e imagem Im = [- b, b].

Analisando o gráfico, concluímos que $p = 4\pi$ e $b = 2$.

De $\dfrac{2\pi}{c} = 4\pi$ vem $c = \dfrac{1}{2}$.

Logo, a função é $y = 2 \,.\, \text{sen}\dfrac{x}{2}$

03. Alternativa d.

No 1.o quadrante, a função seno é crescente. Então sen 45º < sen 50º < sen 60º.

Sendo $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}71$ e $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}87$, temos: 0,71 < sen 50º < 0,87.

Logo, entre as alternativas, o número mais próximo de sen 50º é 0,8.

04. Alternativa b.

Como $-1 \leq \cos x \leq 1$, vem:

se cosx = 1, temos: $\dfrac{1}{3-\cos x} = \dfrac{1}{3-1} = \dfrac{1}{2}$

se cosx = – 1 temos $\dfrac{1}{3-\cos x} = \dfrac{1}{3-(-1)} = \dfrac{1}{4}$

Logo, o menor valor é $\dfrac{1}{4}$.

05. Alternativa c.

Sabendo que $\text{tg}10^\circ = \dfrac{\text{sen}10^\circ}{\cos 10^\circ}$, $\text{cotg}10^\circ = \dfrac{\cos 10^\circ}{\text{sen}10^\circ}$ e

$\text{sen}20^\circ = \text{sen}2 \,.\, (10^\circ) = 2 \,.\, \text{sen}10^\circ \,.\, \cos 10^\circ$ vem:

$(\text{tg}10^\circ + \text{cotg}10^\circ) \,.\, \text{sen}20^\circ = \left(\dfrac{\text{sen}10^\circ}{\cos 10^\circ} + \dfrac{\cos 10^\circ}{\text{sen}10^\circ}\right) . \,\text{sen}20^\circ =$

$$= \left(\dfrac{\overbrace{\text{sen}^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ}^{1}}{\text{sen}10^\circ \cdot \cos 10^\circ}\right) . \,\text{sen}20^\circ = \dfrac{1}{\text{sen}10^\circ \cdot \cos 10^\circ} \,.\, 2\,\text{sen}10^\circ \cos 10^\circ = 2$$

06. Alternativa e.

Temos x + y + 120º = 180º, então x = 60º – y (1) substituindo (1) em

$\dfrac{\cos x}{\cos y} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$, vem: $\dfrac{\cos(60^\circ - y)}{\cos y} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

$$\dfrac{\cos 60^\circ \cdot \cos y + \text{sen } 60 \text{ sen } y}{\cos y} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{\cos 60^\circ \cdot \cancel{\cos y}}{\cancel{\cos y}} + \dfrac{\text{sen } 60^\circ \text{sen } y}{\cos y} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot tgy = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot tgy = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$tgy = 1 \Rightarrow y = 45^o$

Logo $x = 60^o - 45^o \Rightarrow x = 15^o$

Como as alternativas são todas positivas, temos a diferença

$y - x = 45^o - 15^o = 30^o$

07. Alternativa b.

$\cos 2x - \text{sen}x = 0$

$(1 - 2\text{sen}^2x) - \text{sen}x = 0$

$-2\text{sen}^2x - \text{sen}x + 1 = 0\ (-1) \Rightarrow 2\text{sen}^2x + \text{sen}x - 1 = 0$

$$\text{sen}x = \frac{-1 \pm 3}{4} \begin{cases} \text{sen}x = \dfrac{1}{2} \\ \text{ou} \\ \text{sen}x = -1 \end{cases}$$

(1) $\text{sen}x = \frac{1}{2} = \text{sen}\ \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

(2) $\text{sen}x = -1 = \text{sen}\ \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

Como $0 \le x \le 2\pi$, obtemos as soluções: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$

Logo, o número de raízes é 3.