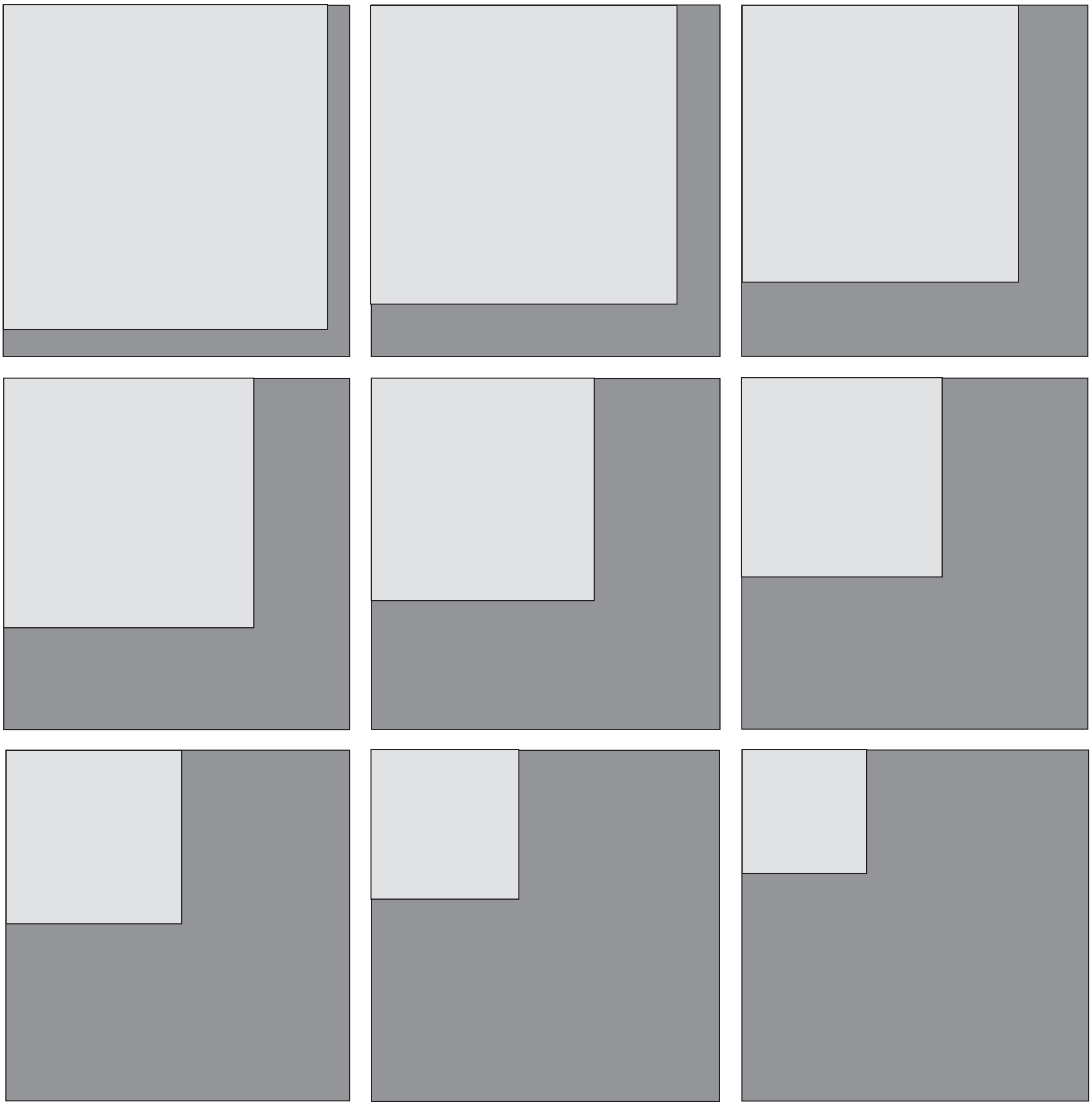
Colégio Bandeirantes



Matemática

Fascículo 06

Álvaro Zimmermann Aranha

Índice

Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares

Resumo Teórico

Matrizes

Representação

$A = (a_{ij})$ 2 x 3 pode ser representada por $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

Matriz Transposta

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 2 \\ c & 3 \end{bmatrix}$$

Igualdade de Matrizes

$A = B \Leftrightarrow (a_{ij}) = (b_{ij})$ para todo i e todo j.

Adição de Matrizes

$C = A + B \Leftrightarrow (c_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij})$ para todo i e todo j.

Propriedades

a. $-A = (-a_{ij})$ para todo i e j

b. $A + B = B + A$

c. $A + O = A$

d. $A + (B + C) = (A + B) + C$

e. $B - A = B + (-A)$

Multiplicação de Matriz por Número

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 3A = \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{bmatrix}$$

Propriedades

a. Em geral $A.B \neq B.A$

b. $A(BC) = (AB)C$

c. $A(B + C) = AB + AC$

d. $(A + B)C = AC + BC$

e. $AI = IA = A$, I matriz identidade

Matriz Quadrada

Número de linhas = número de colunas

Determinante

Matriz 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Matriz 3x3: Regra de Sarrus

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right| = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Matriz Inversa (A^{-1})

$A.A^{-1} = A^{-1}.A = 1$

a. Só existe para matrizes quadradas

b. Só existe A^{-1} quando $\det(A) \neq 0$ e neste caso $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

c. Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{\Delta} & \dfrac{-b}{\Delta} \\ \dfrac{-c}{\Delta} & \dfrac{a}{\Delta} \end{bmatrix}$, $\Delta = \det(A)$

Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz é igual à soma do produto dos elementos de uma linha (ou coluna) pelos respectivos cofatores.

Regra de Chió

Só vale se $a_{11} = 1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ c & 2 & 3 \\ d & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 - ac & 3 - bc \\ 4 - ad & 5 - bd \end{vmatrix}$$

Propriedades dos Determinantes

a. $\det(A^t) = \det(A)$.

b. Se uma linha (ou coluna) é formada só de zeros, o determinante é igual a zero.

c. Quando trocamos de lugar duas linhas (ou colunas) paralelas, o determinante fica multiplicado por –1.

d. Se duas linhas (ou colunas) paralelas são Iguais (ou proporcionais), o determinante é igual a zero.

e. Se os elementos de uma linha (ou coluna) apresentam um fator comum k, este pode ser colocado em evidência.

f. Se A é uma matriz quadrada de ordem n, então $\det(k.A) = k^n.\det(A)$

g. Teorema de Binet: $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$
Atenção: em geral, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

h. Teorema de Jacobi (importante para obtenção de zeros). O determinante de uma matriz não se altera quando somamos a uma linha (ou coluna) outra linha (ou coluna) paralela multiplicada por uma constante.

i. Matriz Triangular: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & - & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1 \cdot 4(-5) \cdot 8$

Sistemas Lineares

Regra de Cramer

Dado o sistema $\begin{cases} a_1{}^{x} + b_1{}^{y} + c_1{}^{z} = d_1 \\ a_2{}^{x} + b_2{}^{y} + c_2{}^{z} = d_2 \\ a_3{}^{x} + b_3{}^{y} + c_3{}^{z} = d_3 \end{cases}$

Seja D o determinante da matriz dos coeficientes, isto é, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

e Dx, Dy e Dz os determinantes que se obtém de D substituindo os coeficientes de x, y e z, respectivamente pelos termos independentes (d_1, d_2 e d_3). Por exemplo, $\mathbf{D}_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

Se $D \neq 0$, então o sistema tem solução única dada por:

$$x = \frac{\mathbf{D}_x}{D};\ y = \frac{\mathbf{D}_y}{D};\ z = \frac{\mathbf{D}_z}{D}$$

Classificação e Discussão de um Sistema Linear

Todo sistema normal (n equações e n incógnitas), é classificado em:

a. Sistema Possível e Determinado (SPD) - Admite uma única solução. $D \neq 0$.

b. Sistema Possível e Indeterminado (SPI) - Admite infinitas soluções. $D = 0$.

c. Sistema Impossível - Não admite solução. $D = 0$.

Sistemas Homogêneos

Todos os termos independentes são nulos. Neste caso o sistema admite a solução trivial (ou imprópria) $x = y = z = 0$. Temos então:

a. $D \neq 0 \Rightarrow$ A única solução é a trivial (0,0,0). O sistema é SPD.

b. $D = 0 \Rightarrow$ Admite além da solução trivial outras soluções. O sistema é SPI.

Atenção: Um sistema homogêneo nunca será impossível.

Exercícios

01. Se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, então A. B é a matriz

a. $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 26 & 31 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 6 & 26 \\ 7 & 31 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 5 & 21 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 12 & 14 \end{bmatrix}$

02. Determine os valores de **x**, **y** e **z** na igualdade abaixo, envolvendo matrizes reais 2 x 2:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y & 0 \\ x & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z-4 & 0 \\ y-z & 0 \end{bmatrix}$$

03.

a. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, calcule a sua inversa A^{-1}.

b. A relação especial, que você deve ter observado entre A e A^{-1} acima, seria também encontrada se calculássemos as matrizes inversas de:

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Generalize e demonstre o resultado observado.

04. Considere as matrizes reais 2 x 2 do tipo

$$A(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$$

a. Calcule o produto A(x) . A (x)

b. Determine todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ para os quais A(x) . A(x) = A(x).

05. Se $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, então o valor do determinante $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & d & 1 \\ c & 0 & 2 \end{vmatrix}$ é

a. 0
b. bc
c. 2bc
d. 3bc
e. b^2c^2

06. Seja $a \in R$ e considere as matrizes reais 2 x 2

$A = \begin{bmatrix} 3^a & -1 \\ -1 & 3^a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7^{a-1} & 8^{a-3} \\ 7 & 2^{-3} \end{bmatrix}$ e , o produto AB será inversível se e somente se:

a. $a^2 - 5a + 6 \neq 0$
b. $a^2 - 5a \neq 0$

c. $a^2 - 3a \neq 0$
d. $a^2 - 2a + 1 \neq 0$
e. $a^2 - 2a \neq 0$

07. Considere **A** e **B** matrizes reais 2 x 2, arbitrárias. Das afirmações abaixo asssinale a verdadeira. No seu caderno de respostas, justifique a afirmação verdadeira e dê exemplo para mostrar que cada uma das demais é falsa.

a. Se **A** é não nula então possui inversa.
b. $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{A}^t\,\mathbf{B}^t$
c. det (**AB**) = det (**BA**)
d. det $\mathbf{A}^2$ = 2 det **A**
e. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$

Dicas

01. Vamos dar um exemplo de produto de duas matrizes para você lembrar:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5\cdot 7 + 3\cdot 1) & (5\cdot 8 + 3\cdot 1) \\ (1\cdot 7 + 0\cdot 1) & (1\cdot 8 + 0\cdot 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35+3 & 40+3 \\ 7+0 & 8+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 43 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

02. Dadas duas matrizes $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$,

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

03. Para calcular a inversa de uma matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2x2}$ podemos usar a fórmula $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

onde $ad - bc \neq 0$.

Se $ad - bc = 0$ a matriz não será inversível.

04. Faça o produto das matrizes e não esqueça que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

05. Comece calculando o valor dos dois determinantes e depois faça uma substituição do primeiro resultado no segundo.

06.

1. Para que uma matriz seja inversível, o seu determinante tem que ser diferente de zero.
2. Teorema de Binet: det(A . B) = det A . det B
3. det (AB) $\neq$ 0 $\Rightarrow$ det A $\neq$ 0 e det B $\neq$ 0

07.

1. Uma matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ não é inversível se o seu determinante for igual a zero, ou seja, se $ad - bc = 0$.
2. Teorema de Binet: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
3. Lembre-se de que o produto de matrizes não é comutativo, ou seja, nem sempre temos $AB = BA$.
4. $\det A^2 = \det (A \cdot A)$
5. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
6. $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$

Resoluções

01. Alternativa b

Vamos efetuar o produto A . B =

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0 \cdot 4 + 1 \cdot 6) & (0 \cdot 5 + 1 \cdot 7) \\ (2 \cdot 4 + 3 \cdot 6) & (2 \cdot 5 + 3 \cdot 7) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 + 6 & 0 + 7 \\ 8 + 18 & 10 + 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 26 & 31 \end{bmatrix}$$

02.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y & 0 \\ x & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z - 4 & 0 \\ y - z & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y + z - 4 & 0 \\ x + y - z & z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 & \text{I} \\ x + y - z = 0 & \text{II} \\ x^2 = z & \text{III} \end{cases}$$

Somando as equações I e II, temos: $2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

Substituindo $x = 2$ em III, temos: $z = 4$

Substituindo em II, temos: $2 + y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2$

Resposta: $x = 2$, $y = 2$, $z = 4$

03.

a. Sendo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2x2} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, então:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Resposta: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

b. A relação especial encontrada foi $A^{-1} = A$.

Observando as matrizes $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ notamos que todas são iguais às suas respectivas inversas. Notamos também que $a_{22} = -a_{11}, a_{12} = -a_{11} + 1$ e $a_{21} = a_{11} + 1$, fazendo $a_{11} = a$ podemos generalizar a matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ como $\begin{bmatrix} a & -a+1 \\ a+1 & -a \end{bmatrix}$

Resposta: A matriz $\begin{bmatrix} a & -a+1 \\ a+1 & -a \end{bmatrix}$ é inversa de si mesma.

04.

a. Calculando o produto A(x) . A(x), temos:

$$A(x) \, . \, A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \operatorname{sen} x \cos x \\ 2 \operatorname{sen} x \cos x & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A(x) \, . \, A(x) = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{sen} 2x \\ \operatorname{sen} 2x & 1 \end{pmatrix}$$

b. A(x) . A(x) = A(x)

$$\begin{pmatrix} 1 & \operatorname{sen} 2x \\ \operatorname{sen} 2x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \quad \mathrm{I} \\ \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x \Rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \operatorname{sen} x \quad \mathrm{II} \end{cases}$$

Substituindo I em II, temos:

2 . sen x . 1 = sen x

2 sen x – sen x = 0

sen x = 0

Os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem as equações cos x = 1 e sen x = 0 são x = 0 ou $x = 2\pi$

Resposta: x = 0 ou $x = 2\pi$

05. Alternativa d

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ad - bc = 0 \Rightarrow ad = bc$$

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & d & 1 \\ c & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2ad + bc = 2 \, . \, (bc) + bc = 3bc$$

06. Alternativa e

Para que A . B seja uma matriz inversível temos que ter det(A . B) ≠ 0.

Pelo teorema de Binet, temos: detA . detB ≠ 0

$$\begin{vmatrix} 3^a & -1 \\ -1 & 3^a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 7^{a-1} & 8^{a-3} \\ 7 & 2^{-3} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$(3^{2a} - 1) \cdot (7^{a-1} \cdot 2^{-3} - 7 \cdot 8^{a-3}) \neq 0$$

$$3^{2a} \neq 0 \quad \text{e} \quad 7^{a-1} \cdot 2^{-3} - 7 \cdot 8^{a-3} \neq 0$$

$$3^{2a} \neq 1 \qquad 7^{a-1} \cdot 2^{-3} \neq 7 \cdot 8^{a-3}$$

$a \neq 0 \qquad \frac{7^a}{7} \cdot \frac{1}{8} \neq 7 \cdot \frac{8^a}{8^3}$

$$\frac{7^a \cdot 8^2}{7 \cdot 8} \neq \frac{7^2 \cdot 8^a}{7 \cdot 8^3}$$

$$\frac{7^a}{8^a} \neq \frac{7^2}{8^2}$$

$$\left(\frac{7}{8}\right)^a \neq \left(\frac{7}{8}\right)^2$$

$a \neq 2$

Como $a \neq 0$ e $a \neq 2$ a resposta correta é $a^2 - 2a \neq 0$.

07. A afirmação verdadeira é a **c**, pois det(A . B) = detA . detB = detB . detA = det(B . A) pelo Teorema de Binet.

As outras afirmações são falsas, veja os exemplos:

a. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 0$ A é não nula mas A não possui inversa.

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \,.\, B)^t = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

$A^t \,.\, B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \cdot B)^t \neq A^t \cdot B^t \Rightarrow (A \,.\, B)^t \neq A^t \,.\, B^t$

d. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A^2 = \det \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right] = \det \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} = 4$

$2 \,.\, \det A = 2 \,.\, \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2 \,.\, (-2) = -4 \Rightarrow \det A^2 \neq 2 \,.\, \det A$

e. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A + B) \,.\, (A - B) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 & -12 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}$

$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 3 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -2 \\ -6 & -22 \end{pmatrix}$

$(A + B) \cdot (A - B) \neq A^2 - B^2$